ВОПРОСЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Выпуск 14 Серия 1985

Электронная вычислительная техника

УДК 681.325.088.8

Нозик А.И.
Шостак А.А.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИАПАЗОНОВ ЗНАЧЕНИЙ ИЗБЫТОЧНЫХ ЦИФР ЧАСТНОГО ПРИ ДЕЛЕНИИ ЧИСЕЛ МЕТОДОМ СТЕФАНЕЛЛИ

Получены верхние границы значений модулей избыточных цифр частного, что предоставляет разработчику необходимый инструмент синтеза устройств деления данного класса.

В основе метода деления, предложенного Стефанелли [1], лежит идея использования избыточных наборов допустимых значений цифр частного. При этом методе формирование двоичного частного $Q \approx C/A$ производится в два этапа. На первом этапе частное вырабатывается в виде двоичного числа

$$Q = q_0 \cdot 2^0 + q_1 \cdot 2^{-1} + q_2 \cdot 2^{-2} + \dots + q_{m-1} \cdot 2^{-(m-1)}$$

с избыточным представлением цифр q_r $(0 \le r \le m-1)$. В качестве цифр q_r используются положительные и отрицательные целые числа, определяемые из следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} q_0 = 1 \\ q_1 = C_2 - a_2 \cdot q_0 \\ q_2 = C_3 - a_2 \cdot q_1 - a_3 \cdot q_0 \\ q_3 = C_4 - a_2 \cdot q_2 - a_3 \cdot q_1 - a_4 \cdot q_0 \\ q_4 = C_5 - a_2 \cdot q_3 - a_3 \cdot q_2 - a_4 \cdot q_1 - a_5 \cdot q_0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_{m-1} = C_m - a_2 \cdot q_{m-2} - a_3 \cdot q_{m-3} - a_4 \cdot q_{m-4} - a_5 \cdot q_{m-5} - \dots - a_m \cdot q_0. \end{cases} \qquad (1)$$

Эта система получена путем приравнивания значений сумм равновесовых разрядных произведений при умножении $A \cdot Q$ значениям соответствующих разрядов делимого C в предположении, что делитель $A = 0,a_1a_2\dots a_n$ и делимое $C = 0,c_1c_2\dots c_n$ есть положительные нормализованные двоичные дроби. В общем случае для определения результата деления с той же точностью, с которой представлены исходные операнды, необходимо формировать число избыточных цифр частного, превышающее число разрядов операндов. А поэтому в системе уравнений (1) значения $(m-n)$ недостающих разрядов делимого и делителя принимаются равными нулю. На втором этапе деления сформированное частное из избыточной формы преобразуется к простому двоичному виду:

$$Q = q_0^* \cdot 2^0 + q_1^* \cdot 2^{-1} + q_2^* \cdot 2^{-2} + \dots + q_{n-1}^* \cdot 2^{-(n-1)}; \quad q_l^* \in \{0,1\} \text{ и } 0 \le l \le n-1.$$

Потенциально рассматриваемый метод деления чисел позволяет заменить последовательный процесс нахождения цифр частного и остатков [2] параллельным алгебраическим суммированием некоторого числа слагаемых, что приводит к существенному сокращению времени выполнения операции деления и приближению его к времени реализации операции умножения. Тем не менее данный метод не нашел должного развития и применения, так как не были получены аналитические зависимости, позволяющие определять диапазоны возможных значений избыточных цифр частного. А это существенно затрудняет анализ и разработку устройств данного класса. В связи с этим исследуем метод деления Стефанелли с целью определения диапазонов возможных значений избыточных цифр частного.

Обратимся к системе уравнений (1) и определим условия, при которых избыточные цифры q_r частного принимают свои экстремальные значения. Сначала определим верхние границы возможных значений цифр q_r для четных значений r и нижние границы – для нечетных значений r.

Цифра q_0 при принятых нами допущениях ($a_1 = c_1 = 1$) всегда равна "+1", поэтому анализ начнем с цифры q_1. Из уравнения для этой цифры нетрудно видеть, что она принимает свое минимальное значение только в том случае, если $C_2 = 0$ и $a_2 = 1$. Анализ третьего уравнения системы (1) показывает, что минимум цифры q_1 при $a_2 = 1$ является необходимым условием максимума цифры q_2. Достаточным же условием того, чтобы цифра q_2 приняла свое максимальное значение, является выполнение следующих соотношений: $q_1 = \min q_1$ при $a_2 = 1, C_3 = 1$ и $a_3 = 0$. Из четвертого уравнения системы (1) определим условие, при котором цифра q_3 принимает свое минимальное значение. Очевидным здесь является то, что цифра C_4 делимого должна быть равна "0", а цифра a_4 делителя – "1". Так как значения цифр q_2 и q_1 входят в уравнение для q_3 с отрицательными коэффициентами ($-a_2$) и ($-a_3$) соответственно, то естественно предположить, что минимум цифры q_3 может быть достигнут при условии, что цифры q_2 и q_1 примут свои максимальные (положительные) значения. Однако, как следует из предыдущих рассуждений, эти цифры не могут одновременно быть максимальными. Так, максимум цифры q_2 обеспечивается при минимуме цифры q_1. Учитывая тот факт, что с увеличением r увеличиваются и диапазоны возможных значений избыточных цифр q_r частного [1], можно предположить, что значение цифры q_{r-1} более сильно влияет на значение цифры q_r, нежели значение цифры q_{r-2}. А поэтому будем считать, что цифра q_3 принимает свое минимальное значение при следующем условии: $q_2 = \max q_2$ при $a_2 = 1$, $q_1 = \min q_1$ при $a_3 = 0$, $c_4 = 0$ и $a_4 = 1$. Аналогично можно установить, что максимум q_4 достигается при условии, что $q_3 = \min q_3$ при $a_2 = 1$, $q_2 = \max q_2$ при $a_3 = 0$, $q_1 = \min q_1$ при $a_4 = 1$, $c_5 = 1$ и $a_5 = 0$.

Рассуждая подобным образом, можно определить условия максимума (или минимума) для других избыточных цифр q_r частного. Пусть k – четное, тогда максимум q_k достигается при условии, что $q_{k-1} = \min q_{k-1}$ при $a_2 = 1$, $q_{k-2} = \max q_{k-2}$ при $a_3 = 0$, $q_{k-3} = \min q_{k-3}$ при $a_4 = 1, \ldots, q_2 = \max q_2$ при $a_{k-1} = 0$, $q_1 = \min q_1$ при $a_k = 1$, $c_{k+1} = 1$ и $a_{k+1} = 0$, т.е., когда делимое $C = 0,\underbrace{101010\ldots 101}_{k+1}XX\ldots X$ и делитель $A = 0,\underbrace{110101\ldots 010}_{k+1}XX\ldots X$, где $X \in \{0,1\}$. Допустим, что k – нечетное, тогда цифра q_k принимает свое минимальное значение, если выполняется следующее условие: $q_{k-1} = \max q_{k-1}$ при $a_2 = 1$, $q_{k-2} = \min q_{k-2}$ при $a_3 = 0$, $q_{k-3} = \max q_{k-3}$ при $a_4 = 1, \ldots, q_2 = \max q_2$ при $a_{k-1} = 1$, $q_1 = \min q_1$ при $a_k = 0$, $c_{k+1} = 0$ и $a_{k+1} = 1$, т.е., когда делимое $C = 0,\underbrace{101010\ldots 010}_{k+1}XX\ldots X$ и делитель $A = 0,\underbrace{110101\ldots 101}_{k+1}XX\ldots X$

Коды значений делимого и делителя, при которых цифры q_r частного принимают максимальные значения для четных r и минимальные значения для нечетных r, в дальнейшем будем называть "тяжелыми" кодами. Если учесть их значения в системе уравнений (1) и выполнить несложные преобразования, то обнаружим, что решения q'_r этой системы образуют знакочередующийся ряд чисел Фибоначчи [3], т.е.

$$q'_r = (-1)^r \cdot U_{r+1}, \qquad (2)$$

где U_{r+1} – $(r+1)$-е число ряда Фибоначчи.

С учетом формулы Бине [3] выражение (2) можно представить в виде

$$q'_r = (-1)^r \cdot \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{r+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{r+1}}{\sqrt{5}}. \qquad (3)$$

Из этого выражения для четных значений r могут быть определены максимально возможные значения избыточных цифр q_r частного, а для нечетных r – их минимально возможные значения.

Определим верхние границы возможных значений цифр q_r частного для нечетных r и нижние границы – для четных r. Предположим, что $q_1 = \max q_1$. Из третьего уравнения системы (1) следует, что необходимым условием минимума цифры q_2 является выполнение соотношения $q_1 = \max q_1$ при $a_2 = 1$. Однако из второго уравнения системы (1) видно, что при $a_2 = 1$ значение q_1 не может быть равно максимуму q_1, который в действительности равен "+1". А поэтому, чтобы условие минимума q_2 не противоречило условию максимума q_1, допустим, что цифра q_0 частного, так же как и цифры исходных операндов, может принимать значение "0" или "1". Тогда, выбрав $q_0 = 0$, мы получим, что $q_1 = \max q_1 = 1$ при $c_2 = 1$ и $a_2 = 1$, и в этом случае приведенное выше необходимое условие минимума q_2 не противоречит условию максимума q_1. Достаточным же условием минимума q_2 является выполнение следующих соотношений: $q_1 = \max q_1$ при $a_2 = 1$, $c_3 = 0$. Значение a_3 не входит в условие минимума цифры q_2, так как в данном случае в выражении для q_2 значение a_3 имеет коэффициент $q_0 = 0$.

Из четвертого уравнения системы (1) следует, что максимум цифры q_3 может быть достигнут при условии, что цифры q_2 и q_1 примут свои минимальные значения. Однако из предыдущих рассуждений следует, что эти цифры не могут быть минимальными одновременно. Поэтому, учитывая тот факт, что значение цифры q_2 более сильно влияет на значение цифры q_3, нежели значение q_1, можно предположить, что необходимым условием максимума цифры q_3 является условие: $q_2 = \min q_2$ при $a_2 = 1$. А так как при этом $q_1 = \max q_1$, то значение коэффициента a_3 при цифре q_1 должно быть равно нулю. Достаточным же условием максимума q_3 является выполнение следующих соотношений: $q_2 = \min q_2$ при $a_2 = 1$, $q_1 = \max q_1$ при $a_3 = 0$, $c_4 = 1$. Значение a_4 не входит в условие максимума цифры q_3, так как в данном случае в выражении для q_3 значение a_4 имеет коэффициент $q_0 = 0$. Аналогично можно определить, что минимум q_4 достигается при следующем условии : $q_3 = \max q_3$ при $a_2=1$, $q_2 = \min q_2$ при $a_3=0$, $q_1 = \max q_1$ при $a_4=1$, $c_5=0$.

Рассуждая и далее подобным образом, можно установить, что максимум q_k для нечетных значений k достигается при условии, что $q_{k-1} = \min q_{k-1}$ при $a_2=1$, $q_{k-2} = \max q_{k-2}$ при $a_3=0$, $q_{k-3} = \min q_{k-3}$ при $a_4=1,\ldots$, $q_2 = \min q_2$ при $a_{k-1}=1$, $q_1 = \max q_1$ при $a_k=0$, $c_{k+1}=1$, т.е., когда делимое C = $0,\underbrace{110101\ldots101}_{k+1}XX\ldots X$, делитель A = $0,\underbrace{110101\ldots010}_{k}XX\ldots X$ и значение $q_0=0$. Минимум же q_k для четных значений k достигается при условии, что $q_{k-1} = \max q_{k-1}$ при $a_2=1$, $q_{k-2} = \min q_{k-2}$ при $a_3=0$, $q_{k-3} = \max q_{k-3}$ при $a_4=1,\ldots$, $q_2 = \min q_2$ при $a_{k-1}=0$, $q_1 = \max q_1$ при $a_k=1$, $c_{k+1}=0$, т.е., когда делимое C = $0,\underbrace{110101\ldots010}_{k+1}XX\ldots X$, делитель A = $0,\underbrace{110101\ldots101}_{k}XX\ldots X$ и значение $q_0=0$.

Подставив полученные значения делимого и делителя в систему уравнений (1) и выполнив несложные преобразования, получим, что решения q''_r этой системы и в этом случае образуют знакочередующийся ряд чисел Фибоначчи, т.е.

$$q''_r = (-1)^{r+1} \cdot U_r = (1)^{r+1} \cdot \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^r - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^r}{\sqrt{5}}, \qquad (4)$$

где U_r – r-е число ряда Фибоначчи.

Но так как максимумы и минимумы соответственно для нечетных и четных значений r цифр q_r частного определены в предположении, что q_0 может принимать значение "0" или "1", то полученные значения максимумов и минимумов в соответствии с выражением (4) по модулю будут превышать те действительные максимальные и минимальные значения цифр q_r, которые получаются из системы (1) при $q_0=1$. Если кроме этого принять во внимание, что согласно работе [3] $U_r < U_{r+1}$ при $r>1$, то легко видеть, что

$$\max|q_r| = U_{r+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{r+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{r+1}}{\sqrt{5}}. \qquad (5)$$

Итак, с помощью выражения (5) можно определить верхние границы значений модулей избыточных цифр q_r частного, причем для n старших цифр эти границы совпадают с реальными максимально возможными значениями модулей избыточных цифр частного, а для $(m-n)$ младших избыточных цифр частного они будут несколько завышенными. Последнее объясняется тем, что выражение (5) получено в предположении использования "тяжелых" кодов делимого и делителя, в то время как фактически $(m-n)$ младших разрядов делимого и делителя являются нулевыми.

Результаты моделирования работы устройства для деления чисел, использующего метод Стефанелли, полностью подтвердили правильность сделанных предположений и выводов о том, что максимальные по модулю значения избыточных цифр q_r частного имеют место в случае подачи на входы устройства "тяжелых" кодов делимого и делителя. Ниже в таблице приведены некоторые результаты моделирования, из которых видно, что максимальные значения модулей избыточных цифр q_r частного образуют ряд чисел Фибоначчи [3].

Избыточные цифры частного	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
$\max q_r$	1	1	2	2	5	4	13	8	34	16
$\min q_r$	1	–1	–1	–3	–3	–8	–5	–21	–12	–55
$\max\lvert q_r\rvert$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Полученные в работе результаты предоставляют разработчику необходимый инструмент синтеза устройств деления данного класса и позволяют более качественно проводить сопоставительный анализ различных устройств быстрого деления чисел [2].

Литература

1. Stefanelli R. A suggestion for a high-speed parallel binary divider. - IEEE Trans. Comput., 1972, v. C-21, N 1, p. 42-55.

2. Карцев М.А., Брик В.А. Вычислительные системы и синхронная арифметика. М.: Радио и связь, 1981. - 360 с.

3. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1984. - 144 с.

Статья поступила в мае 1985 г.